

# МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Кузьмич О.І., Мекуш О.Г., Гришанович Т.О.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

В даній роботі проводиться аналіз одного із сучасних підходів до опису та моделювання процесів розвитку популяцій, а саме - методу диференціальних моделей, який дозволяє моделювати складні природні явища, такі як самовідтворення, зростання і розвиток. Найбільш цікаві результати по якісному моделюванню властивостей біологічних систем отримані на моделях, які допускають якісне дослідження за допомогою методу фазової площини. Розглянемо модель Лотки-Вольтерри, яка по своїй суті є математичним описом дарвінівського принципу боротьби за виживання, викладеного у [1]. Проведемо її моделювання в середовищі MatLab на базі використання солвера "ode45".

Нехай маємо деякий біологічний вид, у якого немає ворогів, а харчова база є в достатній кількості (модель Мальтуса). Швидкість приросту популяції пропорційна числу особин, тобто  $\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)N(t)$ , де  $\alpha(t)$  - коефіцієнт приросту.

1. Ця модель реалізовувалась в MatLab з початковими даними: початкова чисельність популяції 8, початковий коефіцієнт приросту чисельності популяції рівний 4. Подальший аналіз проводився шляхом варіації коефіцієнта народжуваності жертв. Так, при умові його послідовного зменшення  $\alpha = 3$ ,  $\alpha = 2$  маємо графіки, подані на рис. 1.

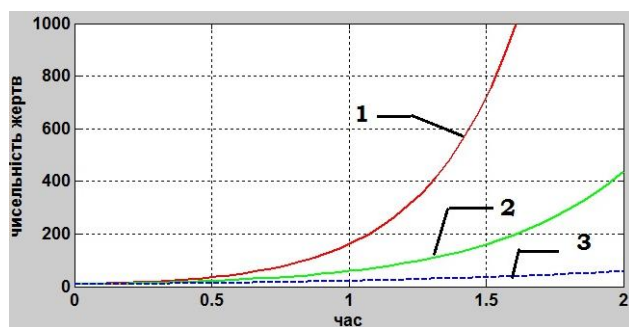


Рис. 1. Динаміка популяції при умові відсутності хижаків. Графік 1 - при  $\alpha = 3$ , графік 2 - при  $\alpha = 2$ , графік 3 при  $\alpha = 1$ .

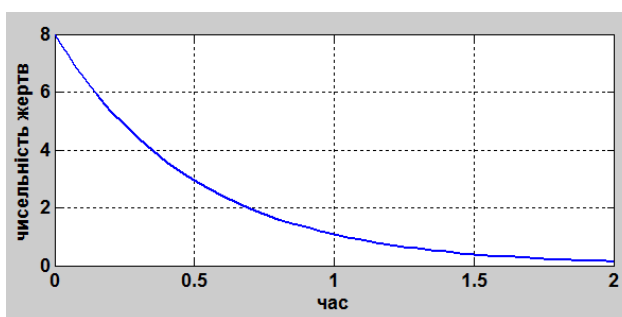


Рис. 2. Динаміка чисельності популяції при відсутності хижаків

2. При врахуванні процесу смертності особин, одержимо, що швидкість зміни населення популяції з часом пропорційна її чисельності  $N(t)$ , помноженій на суму коефіцієнтів народжуваності  $\alpha(t) \geq 0$  і смертності  $\beta(t) \leq 0$ . При умові сталості цих коефіцієнтів, а також умові  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$  одержимо динаміку, подану на рис.2. Спостерігається експоненціальний спад чисельності популяції.

3. Росту чисельності жертв перешкоджають їх зустрічі з хижаками. Швидкість зміни чисельності жертв описується рівнянням  $\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$ , де  $\beta$  - коефіцієнт

зменшення жертв при зустрічі з хижаками. Аналогічно, зустріч хижака з жертвою збільшує ймовірність виживання хижака, тобто сприяє приросту популяції хижаків  $\left\{ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \right.$ , де  $\delta > 0$  - коефіцієнт, що залежить від того, як часто зустріч закінчується смертю жертви. Відповідна система Лотки-Вольтерра реалізовувалась в MatLab з такими початковими значеннями: початкова чисельність жертв становила 7, популяція хижаків – 4, коефіцієнти  $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 1$ . Графік 4 на рис. 3 демонструє залежність числа хижаків від числа жертв в цьому випадку (фазова залежність), та на рис. 4 відповідні часові графіки популяцій (сині лінії). Далі при зростанні числа жертв до 8 на графіку 3 (рис. 3) бачимо суттєве зменшення амплітуд фазових коливань. На графіках фазових траєкторій (рис. 3) також показано особливі точки для кожного випадку. Часові залежності для цього випадку показані на рис. 4 (зелені лінії). На рис. 4 показано часові залежності зеленим кольором при  $\alpha = 8, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 1$ , та синім кольором при  $\alpha = 4$ , що демонструє залежність числа хижаків від числа жертв. Так, при умові подальшого зростання  $\alpha = 17$  і  $\alpha = 25$  маємо графіки 2 і 1 відповідно, які подані на рис. 3.

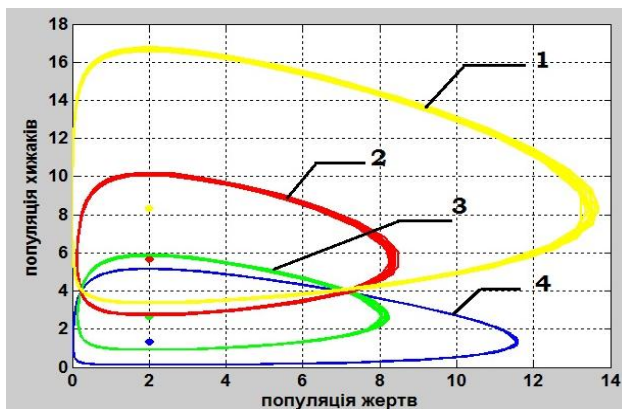


Рис. 3. Графік фазових залежностей популяції хижаків від популяції жертв. Графік 4 при  $\alpha = 4$ , графік 3 - при  $\alpha = 8$ , графік 2 - при  $\alpha = 17$ , графік 1 - при  $\alpha = 25$

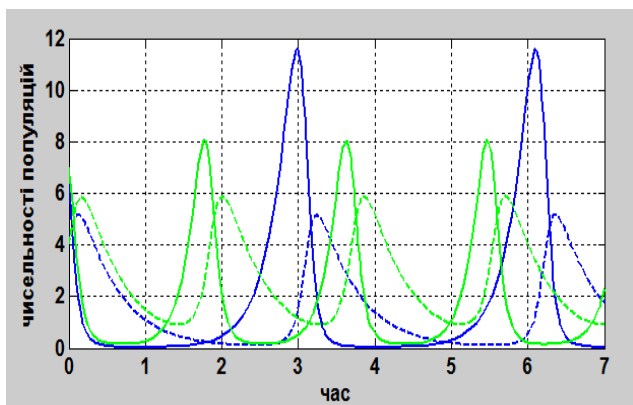


Рис. 4. Часові залежності популяцій для випадків: при  $\alpha = 4$  (синій колір), при  $\alpha = 8$  (зелений колір).

Отже, результати моделювання показують, що чисельності популяцій відчують не співпадаючі по фазі коливання (рис.3, 4). Зі зростанням коефіцієнта народжуваності жертв спостерігаємо циклічну зміну амплітуд коливань обох популяцій. Це дозволяє як візуально, так і кількісно оцінювати стан, функціонування, динаміку і характер взаємин популяцій в біосистемах.

#### Список використаних джерел

1. Darwin C. Autobiography.- New York: Norton, 1958.-120 p.
2. Lotka A. Elements of physical biology.-Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.- pp. 85-86.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.-М.: Наука, 1976.-288 с.
4. Malthus T.H. An assay on the principle of population, as it affects the future improvement of society. – Penguin: Harmondsworth, 1978.- pp. 613–637.